Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις, Φεβρουάριος 2024

Θέμα 1

Δίνεται η εξίσωση

$$y''(t) + 6y'(t) + 25y(t) = \cos(\lambda t),\ t \in \mathbb{R},\ (\lambda \in \mathbb{R})$$

(i) [1.5] Να λυθεί η εξίσωση.

(ii) [0.4] Να εξετασθεί η ισχύς των προτάσεων:

(A) Ολες οι λύσεις της εξίσωσης είναι φραγμένες.

(B) Υπάρχουν λύσεις της εξίσωσης που διατηρούν σταθερό πρόσημο.

(iii) [0.6] Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της λύσης του π.α.τ που απαρτίζεται από την εξίσωση για $\lambda = 0$ και τις αρχικές τιμές $y(0) = y'(0) = 0$.

Θέμα 2

(i) [1.4] Να εξετασθούν ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο των λύσεων τα π.α.τ

$$y' = 2y^{\frac{2024}{c}},\ y(m) = k,\ x \geq 0$$

(A) για $m = c,\ k = 0$

(B) για $m = 0,\ k = c,$

όπου το c είναι ο Αριθμός Μητρώου σας.

(ii) [1.1] Να αποδειχθεί ότι μια συνάρτηση $f \in C^1[0, +\infty)$ και εκθετικής τάξεως $k > 0$ μετασχηματίζεται κατά Laplace και ισχύει $\mathcal{L}[y'](s) = s\mathcal{L}(s) - y(0),\ s > k$.

Θέμα 3

(i) Θεωρούμε το π.α.τ

$$(x^2 + y^2)\ dx + 2xy\ dy = 0,\ y(1) = 0$$

Να εξετασθεί η αλήθεια των ισχυρισμών:

(a) [0.9] το πρόβλημα έχει ακριβώς μια λύση.

(b) [0.6] το πεδίο ορισμού της λύσης (ή των λύσεων) του π.α.τ είναι κλειστό διάστημα.

(ii) (a) [0.5] Να εξετασθεί αν οι συναρτήσεις $y_k(t) = t^k,\ k = 1, \ldots, 2024,\ t \in \mathbb{R}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

(b) [0.5] Να εξετασθεί αν υπάρχει 2024−τάξης ομογενής γραμμική δ.ε ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με β.σ.λ της το

$$S = \{y_k(t) = t^k :\ i = 1, \ldots, 2024,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Θέμα 4

(i) Θεωρούμε τη γραμμική δ.ε

$$x^2y'' + 3xy' + \lambda y = 0,\ y(1) = 0$$

(a) [1.5] Να λυθεί η εξίσωση.

(b) [0.5] Αν λ_1, λ_2 είναι δύο ιδιοτιμές του προβλήματος συνοριακών τιμών που απαρτίζεται από την εξίσωση και τις συνοριακές συνθήκες

$$y(1) + 2y'(1) = 0, \quad 2y(3) - 5y'(3) = 0$$

να δοθεί η έκφραση ορθογωνιότητας των ιδιοσυναρτήσεων y_1, y_2 που αντιστοιχούν στις λ_1, λ_2, αντίστοιχα και να διατυπωθεί στη γενικότητά της η πρόταση που χρησιμοποιήθηκε.

(ii) [0.5] Για μια ομογενή γραμμική δ.ε δεύτερης τάξεως (Ε) που ορίζεται στο διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, να εξετασθεί η ισχύς της πρότασης:
«Υπάρχουν λύσεις y_1, y_2, y_3 της εξίσωσης (Ε) και σημείο $x_0 \in I$ ώστε για την ορίζουσα Wronski των y_1, y_2, y_3 να ισχύει $W(y_1, y_2, y_3)(x_0) \neq 0$ ».

Θέμα 5

(i) Θεωρούμε τη γραμμική δ.ε

$$xy'' + xy' + 2y = 0$$

(a) [1] Να βρεθεί μια λύση της εξίσωσης γύρω από το σημείο $x_0 = 0$.

(b) [0.5] Να υποδειχθούν δύο τρόποι εύρεσης ενός β.σ.λ της παραπάνω εξίσωσης.

(ii) Ας είναι y_0 μία λύση του π.α.τ

$$y'(x) + 2y(x) = \begin{cases} 1 - |x| & , \quad x \in [-1, 1] \\ 0 & , \quad |x| > 1 \end{cases}, \; y(0) = 0$$

(a) [0.8] Να υπολογισθεί η τιμή $y_0(\ln(10))$.

(b) [0.7] Να εξετασθεί αν η y_0 είναι φραγμένη.

Να δοθούν απαντήσεις σε τέσσερα θέματα

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ